

Sündmuste sõltuvus ja tinglik tõenäosus

Sõltuvus, sõltumatus, tõenäosuste korrutis, tinglik tõenäosus

Põhikool

Sõltuvus ja sõltumatus on statistikas põhilise tähtsusega mõisted, nende äratundmine aitab paremini mõista meid ümbritsevat elukeskkonda, samuti aru saada ühiskonnas toimuvatest protsessidest. Igasugune sündmuste ja protsesside ennustamine on võimalik tänu statistilisele sõltuvusele sündmuste ja nähtuste vahel ja nende sõltuvuste tunnetamisele.

Sündmuste sõltumatus ja sõltuvus

Kaks sündmust on **sõltumatud**, kui ühe toimumise tõenäosus ei sõltu sellest, kas teine toimub või ei toimu. Sündmuste sõltumatus on vastastikune – ükskõik kumb neist on „esimene“ ja kumb „teine“. Sündmused, mis ei ole **sõltumatud**, on **sõltuvad**. Sündmuste sõltuvus võib olla mitmesugune: võib juhtuda nii, et ühe sündmuse toimumisest järeldeb teise toimumine kindlasti. Näiteks kui toimub sündmus „vihma sajab“, siis kindlasti toimub ka sündmus „taevas on pilves“. Võib tuua ka vastupidise näite: ühe sündmuse toimumisest järeldeb, et teine ei toimu. Näiteks kui vastsündinu on poiss, siis ta pole tüdruk. Ka sündmuste sõltuvus on vastastikune, samuti nagu sõltumatus.

Sündmuste sõltuvus võib tähendada ka seda, et ühe sündmuse toimumine suurendab teise sündmuse toimumise tõenäosust, kuid sellegipärast see teine sündmus ei tarvitse toimuda. Nii näiteks suurendab pilves ilm vihasaju tõenäosust, kuid sellegipärast ei tarvitse vihma sadama hakata.

Gümnaasium

Tõenäosuste korrutamise valem

Kui sündmused A ja B on sõltumatud, siis nende sündmuste koosesinemise tõenäosus $P(AB)$ võrdub nende sündmuste tõenäosuste korrutisega:

$$P(AB) = P(A) P(B). \quad (1)$$

Seda valemit, mida tuntakse tõenäosuste korrutamise valemina, võib ka käsitleda kui sündmuste sõltumatuse definitsiooni.

Tinglik tõenäosus

Kui sündmused ei ole sõltumatud, siis nad on sõltuvad. Sõltuvate sündmuste esinemissagedusi iseloomustavad tinglikud tõenäosused.

Kui sündmuse A sõltub sündmusest B, siis on sündmuse A tõenäosus tingimusel, et sündmus B toimub $P(A|B) = P(AB)/P(B)$. Oluline on, et sündmuse B toimumine võib sündmuse A tõenäosust nii suurendada kui ka vähendada.

Näited

Näide 1: Kindlasti on pilvine taevast ja vihasadu sõltuvad sündmused. Olgu tõenäosus, et 10. aprillil sajab vihma $P(A) = 1/3$ ja tõenäosus, et sellel päeval taevast on pilvine, $P(B) = 2/3$. Loomulikult järeldeb sellest, et vihma sajab, ka see, et taevast on pilvine, seega $P(AB) = P(A) = 1/3$.

Leiame nüüd vihmasaju tõenäosuse tingimusel, et taevas on pilves: $P(A|B) = P(AB)/P(B) = \frac{1}{2}$.

Näide 2.

Esitame näitena 2011. aasta andmed USAs toimunud liiklusõnnetuste kohta: <http://www-nrd.nhtsa.dot.gov/Pubs/811755DS.pdf>.

Andmed on esitatud tuhandetes ja paigutatud alljärgnevasse tabelisse, kus ridades on erinevas staatuses liiklejate (juht, kaasreisija) avariitulemused ja veergudes avariitulemused (hukkunud, ainult vigastatud) eri staatuses liiklejate puhul.

Kannatanu staatus	Avariitulemus		
	Hukkunud	Ainult vigastatud	Kokku
Juht	16	1416	1432
Kaasreisija	6	593	599
Kokku	22	2009	2031

Olgu sündmus, mille tõenäosus meid huvitab, "liiklusõnnetuses kannatada saanu oli autojuht". Meile saab teatavaks veel, et "liiklusõnnetuses kannatanu hukkus". Kuna autojuhil ja reisijatel on avarii kannatada saamise puhul hukkumise tõenäosus erinev, annab lisainfo olulist täiendavat teavet. Huvipakkuva sündmuse võime nüüd sõnastada lisateabe abil: „liiklusõnnetuses kannatanu oli autojuht, kui on teada, et kannatanu hukkus“ ehk lühidalt "liiklusõnnetuses hukkus autojuht".

Nii ümber nimetatud sündmuse tõenäosus ongi tinglik tõenäosus, mis kirjeldab olukorda pärast seda, kui on saadud täiendavat infot (kannatanu hukkus) huvipakkuva sündmuse toimumise kohta.

Teeme vajalikud arvutused.

- Tõenäosuse, et "liiklusõnnetuses kannatada saanu oli autojuht", leiame tabeli viimasest veerust, see on $1432/2031 \sim 71\%$.
- Kui me teame täiendavalt, et "autoõnnetuse tagajärjel kannatada saanud inimene hukkus", siis saame hindamiseks kasutada avarii käigus hukkunute andmeid, mis paiknevad esitatud tabeli teises veerus ja leiame, et meid huvitav tõenäosus on $16/22 \sim 73\%$.

Sõltumatuse eeldus ja selle ohud

Sageli eeldatakse arvutuste lihtsustamiseks mitmesuguste sündmuste sõltumatust, kuid sõltumatuse eelduse õigustamatu kasutamine võib vahel olla katastroofiliste tagajärgedega.

Näiteks kasutatakse mingi ohtliku seadme (tuumareaktori) juures viit erinevat turvasüsteemi, millest igaühe tõrke tõenäosus on $1/1000$. Kui need toimivad sõltumatult, siis on kõigi nende üheaegse tõrke tõenäosus $(1/1000)^5 = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 001$, mis tähendab, et turvasüsteem on tõepoolest üpris tõhus. Kui aga leidub mingi ühine tegur (näiteks tsunami või inseneri inimlik viga), mis tekitab tõrke üheaegselt kõigis turvaseadmetes, st et nende sõltumatuse eeldus on rikutud, siis võib toimuda ränk katastroof.