Sündmus ja tõenäosus

Katse, katsetulemused, sündmus, sündmuse toimumine, tõenäosus, kindel, võimatu ja juhuslik sündmus, statistiline tõenäosus*, klassikaline tõenäosus*, vastandsündmus*, sündmuste summa*, sündmuste järeldusseos*, sündmuste korrutis*, sündmuste sõltumatus* ja sõltuvus*

Põhikool

Võrdvõimalike tulemustega katse

Vaatame kõigepealt lihtsaid katseid, mille võimalikud tulemused on teada ja on ka teada, et need on võrdvõimalikud, kusjuures seda tagab katse korraldus. Niisuguseid katseid tehakse tavaliselt õnnemängude puhul ja selliste katsete tulemuste üle mõtiskledes lõidki matemaatikud palju sajandeid tagasi tõenäosusteooria põhialused.

Olgu **katsel** n **tulemust** ja oletame, et tulemuste esinemine on võrdvõimalik. Igati loomulik on sel juhul lugeda iga katsetulemuse **tõenäosus** võrdseks arvuga 1/n**.**

Näiteks kuuetahulise täringu veeretamisel on katsetulemuste hulk { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ja iga tulemuse tõenäosus on 1/6.

Teise näitena vaatleme katsena kaardi juhuslikku tõmbamist 52-lehelisest kaardipakist. Kuna kõigi kaartide saamine on võrdse tõenäosusega, on katsetulemused ja nende tõenäosused esitatavad alljärgneva tabelina, kus iga rida tähistab erinevat masti:

"A"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"	"7"	"8"	"9"	"10"	"J"	"Q"	"K"
$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$
$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$
$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$
$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$

Sündmus ja selle toimumine

Katse tulemusena toimuv sündmus on seda sündmust määravate katsetulemuste hulk (või ka: selles sündmuses sisalduvate katsetulemuste hulk).
Näiteks täringuviske tulemus „saadakse paarisarv" on katsetulemuste „2", „4" ja „6" hulk.
Sündmus toimub siis, kui toimub mõni selles sündmuses sisalduv katsetulemus.
Kui katse on tehtud, siis saab öelda, kas **sündmus toimus** või ei toimunud.

- Kui meid huvitab sündmus, et täringuviskel saadakse tulemuseks paarisarv, siis see toimub siis, kui katsetulemuseks on 2, 4 või 6.
- Kui huvipakkuv sündmus on ärtukaardi saamine, siis on selle sündmuse jaoks soodsaid katsetulemusi 13 – kõik ärtukaardid.

Sündmuse tõenäosus

Sündmuse tõenäosus on arvutatav kui sellesse kuuluvate katsetulemuste tõenäosuste summa.Kui katsetulemused on võrdtõenäosed, siis on sündmuse tõenäosus suhe k/n, kus k on sündmuses sisalduvate katsetulemuste arv ja n – katsetulemuste koguarv.

- Esimeses näites on paarisarvulise tulemuse saamise tõenäosus 3/6 = ½.

- Teises näites on ärtumastist kaardi saamise tõenäosus ülalkirjeldatud katsel $13 \cdot (1/52) = 1/4$.

Kindel, võimatu ja juhuslik sündmus

Tõenäosus on arv 0 ja 1 vahel, kusjuures mida suurem on sündmuse tõenäosus, seda suurem on üldiselt võimalus sündmuse toimumiseks. Kui sündmuse tõenäosus on 0, siis on sündmus **võimatu** ja ei saa toimuda. Näiteks pole tavalise täringu viskamisel võimalik saada 7 silma – see on võimatu sündmus. Kui sündmuse tõenäosus on 1, siis on sündmus **kindel** ja see toimub katse tulemusena alati. Niisugune on näiteks sündmus, et täringuviske tulemus pole suurem kui 10. Kui sündmus võib toimuda või ka mitte toimuda, siis on sündmus **juhuslik.**

Juhusliku sündmuse tõenäosus näitab seda, kui sageli see sündmus juhtub, kui korrata katset palju kordi. Selgub, et sündmuse esinemise suhteline sagedus (so esinemiste arvu ja katsete arvu suhe) läheneb sündmuse tõenäosusele.

Gümnaasium

Tõenäosuse määramine katseseeria põhjal

Kõigi sündmuste puhul ei ole ülalkirjeldatud tõenäosuse arvutamise eeskiri rakendatav, sest need ei koosne võrdtõenäostest katsetulemustest.

Küll aga saab sündmuse tõenäosust hinnata siis, kui sündmus toimub mingi katse tulemusena ja seda katset on võimalik palju kordi täpselt ühesugustes tingimustes korrata.

Näiteks sobib siia knopkade loopimise ülesanne.

Katseseeria põhjal hinnatud sündmuse tõenäosus on k/n, kus k on selliste katsetulemuste arv, mille korral sündmus toimus ja n – katsetulemuste koguarv.

Klassikaline ja statistiline tõenäosus

Sõltumatute katsete seeria põhjal määratud tõenäosust nimetatakse **statistiliseks tõenäosuseks** eristamaks seda võrdtõenäoste katsetulemuste põhjal määratud nn **klassikalisest tõenäosusest** (millega tutvuti põhikoolis).

Seda, et mõlemal viisil määratletud tõenäosus on olemuslikult lähedased, kinnitab see, et juhul kui mingi sündmuse kohta on teada klassikaline tõenäosus, siis pika katseseeria puhul saadud statistiline tõenäosus on arvuliselt väga lähedane sama sündmuse klassikalisele tõenäosusele.

Katse tegeliku kordamise asemel võib seda teha ka arvuti abil. Niisugust arvuti abil katsetamist nimetatakse **simuleerimiseks.**

Kui katseseeria pikkus n on fikseeritud, siis on statistilisel tõenäosusel üldiselt samad omadused, mis klassikalisel tõenäosusel. Katseseeria pikendamisel aga sündmuste statistilised tõenäosused üldiselt muutuvad, kuid enamasti on muutused võrdlemisi väiksed.

Ka ei saa väita, et kui sündmus ei ole n katse jooksul toimunud, siis see sündmus on võimatu: võib juhtuda, et järgmise katse korral sündmus siiski esineb. Samuti ei järeldu sellest, et sündmuse statistiline tõenäosus on 1, see, et sündmus on kindel. Nende omaduste poolest erineb statistiline tõenäosus klassikalisest tõenäosusest.

Ettepanek, mida lisada: tehted sündmustega ja neist järelduvad seosed tõenäosuste vahel.

Sündmuste ja tõenäosuste omadused

Sama katse abil määratud sündmusi seovad mitmed seaduspärasused, millest järelduvad seosed nende tõenäosuste vahel. Käesolevas lõigus kasutatakse sündmuste tähistamiseks tähti A, B jne ning sündmuste tõenäosusi tähistab täht P, näiteks sündmuse A tõenäosus on P(A).

Vastandsündmus. Iga sündmusega on määratud ka tema vastandsündmus, mis toimub täpselt siis, kui algne sündmus ei toimu, ja vastupidi. Näiteks kui algne sündmus A on täringuviskel paarisarvulise tulemuse saamine, siis selle vastandsündmus A^- on paarituarvulise sündmuse saamine. Kui on teada algsündmuse tõenäosus P(A), siis on lihtne arvutada ka vastandsündmuse tõenäosus $P(A^-) = 1 – P(A)$.

Sündmuste summa. Kahe sündmuse A ja B summa AUB on määratud kõigi katsetulemustega, mis sisalduvad kas sündmuses A, sündmuses B või mõlemas. Sündmuste summa tõenäosus on vähemalt sama suur kui kummagi liidetava sündmuse tõenäosus, st kehtivad võrratused P(AUB) ≥P(A), P(AUB) ≥P(B).

Näiteks kui kaardimängus soovib mängija saada kas ässa või potimastist kaarti, siis koosneb tema soovitav sündmus järgmistest katsetulemustest: 13 potimastist kaarti ja 3 ässa (ärtu, ruutu ja risti), seega on selle tõenäosus 16/52.

Sündmuste järeldusseos. Võib juhtuda, et ühe sündmuse (A) toimumisest järeldub loogiliselt, et ka mõni teine sündmus (B) toimub. Sel juhul öeldakse, et sündmuse vahel on järeldusseos, AcB. Näiteks sellest, et täringuviskel saadi 2 silma järeldub, et tulemus oli paarisarv. Vastupidine seos aga ei kehti: sellest, et tulemus oli paarisarv, ei saa järeldada täpset silmade arvu. Sündmuste järeldusseosest tuleneb ka vahekord nende sündmuste tõenäosuste vahel: kui AcB, siis P(A) ≤ P(B).

Sündmuste korrutis. Kahe sündmuse korrutis AB on sündmus, mis toimub siis, kui ühtaegu toimuvad mõlemad korrutatavad sündmused. Kui sündmus A on potikaardi võtmine ja sündmus B – piltkaardi võtmine, siis sündmus AB toimub siis, kui kaardipakist võetud kaart on potimastist piltkaart.

Kui sündmused A ja B on sõltumatud, st et neist ühe toimumine ei mõjuta teise toimumist, siis on nende sündmuste korrutise tõenäosus võrdne sündmuste tõenäosuste korrutisega:

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Sündmuste sõltumatus ja sõltuvus. Saadud seost (mida nimetatakse tõenäosuste korrutamise lauseks) kasutatakse ka vastupidi, selleks et defineerida sõltumatuid ja sõltuvaid sündmusi: kui sündmuste korrutise tõenäosus võrdub sündmuste tõenäosuste korrutisega, siis on sündmused sõltumatud. Kui sündmused ei ole sõltumatud, siis nad **on sõltuvad.**

Esitatud võrdust saame kasutada näitamaks, et viimases näites on sündmused A ja B sõltumatud. Siin toimub sündmus AB siis, kui katsetulemuseks on kas poti kuningas, poti emand või poti soldat, st P(AB) = 3/52. Sündmuse A tõenäosus on 13/52 =1/4, sündmuse B tõenäosus on 12/52 ja korrutis P(A) P(B) = ¼· 12/52 =3/52. Järelikult on sündmused A ja B sõltumatud.