Matemaatiline mudel

Matemaatiline mudel, valem, mudeli parameeter, deterministlik mudel, tõenäosuslik mudel, katse, katsetulemus, empiiriline jaotus, tõenäosusjaotus

Põhikool

Mudel on tegelikkuse lihtsustatud kirjeldus. Enamasti kasutatakse mudeleid uuritava reaalelulise protsessi kirjeldamiseks ja tulemuste prognoosimiseks, sh ka tuleviku ennustamiseks. **Matemaatilist mudelit** saab väljendada matemaatika keeles, st **valemina**, mis sisaldab uuritavaid muutujaid, aga ka teatavaid arvväärtusi **– mudeli parameetreid**.

Matemaatilise mudeli abil on võimalik anda arvulisi hinnanguid ja koostada prognoose, näiteks prognoosida riigi majanduskasvu järgmiseks aastaks või ennustada lähipäevade ilma. Enne matemaatilise mudeli kasutusele võtmist tuleb kontrollida, kas selle eeldused on täidetud.

Gümnaasium

Mudeli liigid

Matemaatilised mudelid jagunevad **deterministlikeks ja tõenäosuslikeks (statistilisteks)**. Deterministlikke mudeleid saab kasutada siis, kui jälgitav protsess on teada ja selle tulemus ei sõltu juhusest.
Näiteks keha kõrgus h maapinnast hetkel t pärast katse algust avaldub valemiga $h = H—gt^2/2$,
kus H on algkõrgus ja g – raskuskiirendus (gravitatsioonikonstant).

See mudel on determineeritud ja põhineb Newtoni mehaanika reeglitel: keha langeb gravitatsiooni toimel. Kui protsess ei ole üksikasjadeni selge või selle tulemust mõjutab mõni põhimõtteliselt juhuslik tegur, siis tuleb kasutada selle seletamiseks ja analüüsimiseks tõenäosuslikku mudelit. Käesolevas kursuses käsitletakse tõenäosuslikke mudeleid. Sel juhul on analüüsitaval protsessil mitu võimalikku tulemust ja pole teada, missugune neist toimub. Tõenäosuslik mudel võimaldab sellist protsessi analüüsida, näiteks hinnata oodatava tulemuse keskväärtust ja kõikumisi selle ümber. Tõenäosuslik mudel võib ka siduda mitut juhuslikku suurust, võimaldades neist ühe väärtusi prognoosida teiste juhuslike suuruste kaudu.

Tõenäosusliku mudeli loomine

Sageli on tõenäosuslikuks mudeliks, mida soovitakse konstrueerida, tõenäosusjaotus, mis peaks kirjeldama mingit uuritavat juhuslikku protsessi. See ülesanne on olemuselt sarnane jaotuste sobitamise ülesandega (vt Jaotuste sobitamine), erinevused tulenevad lähteinfo olemasolust.

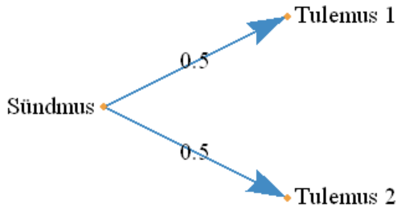
Tõenäosusliku mudeli konstrueerimiseks on tarvis selgitada uuritava protsessi kõik võimalikud tulemused (katsetulemused) ja omistada igale tulemusele tõenäosus nii, et tõenäosuste summa oleks võrdne ühega. Katsetulemuse tõenäosus peegeldab seda, kui usutav on vastava katsetulemuse saamine. Mõnikord rahuldabki saadud info uurimiseesmärke: katsetulemused koos nende tõenäosustega annavadki soovitava tõenäosusliku mudeli.

Kui protsessi tulemuste tõenäosuste kohta eelinfot ei ole, tehakse rida katseid ja iga tulemuse tõenäosuseks loetakse selle suhteline sagedus. Katsetulemused koos suhteliste sagedustega moodustavad empiirilise jaotuse. Järgmiseks sammuks on empiirilise jaotuse lähendamine sobiva tõenäosusjaotusega, mis sobib uuritava protsessi mudeliks.

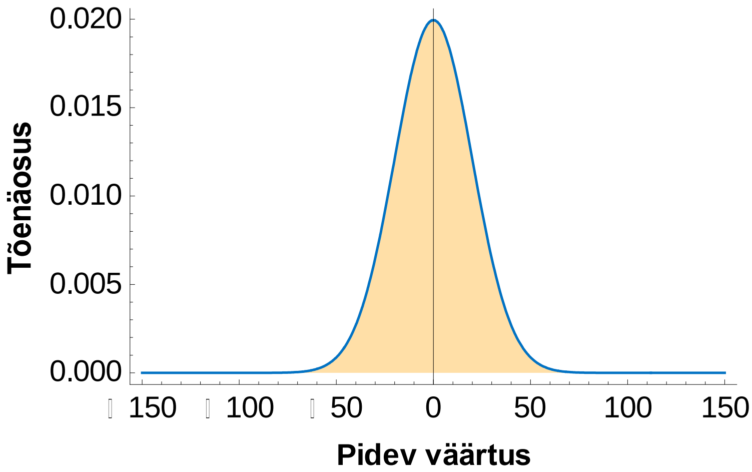
Tõenäosuslik mudel annab üldiselt samade parameetrite korral mõnevõrra erineva tulemuse, see eristab teda deterministlikust mudelist, mis annab samade parameetrite korral alati ühesuguse tulemuse. Tõenäosusliku mudeli abil tehakse prognoos sisaldab paratamatult juhuslikku viga.

Protsesside ja neid kirjeldavate mudelite näited

Mõned tõenäosuslikud mudelid on üsna lihtsad ja võimalike katsetulemuste arv on neis väike. Selline on näiteks mudel, millega kirjeldatakse kahe võrdvõimaliku tulemusega mündiviset:



Kuid on ka keerukamaid tõenäosuslikke mudeleid, sh ka selliseid, kus võimalikuks tulemuseks on mistahes reaalarv. Enamasti on ka selliste mudelite puhul võimalik kindlaks teha piirkond, kuhu katsetulemuse sattumise tõenäosus on suhteliselt suur ja vastupidi, piirkond, kuhu katsetulemuse sattumise tõenäosus on nullilähedane.



Mingi protsessi jaoks tõenäosusliku mudeli loomiseks on tarvis
1) defineerida katse, mis iseloomustab seda protsessi;
2) määrama kindlaks kõik selle protsessi võimalikud tulemused (katsetulemused);
3) omistama katsetulemustele tõenäosused.

Katsetulemuste tõenäosuste määramine

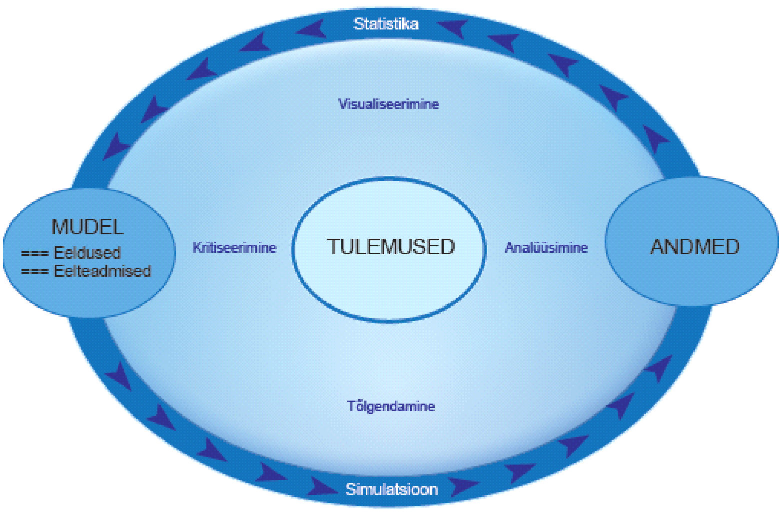
Katsetulemuste tõenäosuste määramiseks on kaks põhilist võimalust.

- Mõnikord on võimalik kasutada eelteadmisi protsessi kohta (näiteks, kui tegemist on olukorraga, kus katsetulemused on võrdtõenäosed, nt mündi- või täringuviske puhul). Siis on iga katsetulemuse tõenäosus 1/k, kus k on erinevate katsetulemuste arv.
- Kui niisugust eelteadmist ei ole, määratakse katsetulemuste tõenäosused statistiliselt, katset paljukordselt korrates ja lugedes katsetulemuste tõenäosusteks nende suhtelised sagedused.

- Sama mõttekäiku saab kasutada ka simuleerides: kordame protsessi imiteerivat katset palju kordi. Registreerime katsetulemused, leiame nende suhtelised sagedused, ning kasutame neid mudelis tõenäosustena.

Reaaleluliste protsesside modelleerimise üldine käik

Erinevaid lähenemisi võib ka omavahel kombineerida. Näiteks teeme kõigepealt katse ja leiame katsetulemuste suhtelised sagedused (empiirilise jaotuse), seejärel leiame empiirilist jaotust hästi lähendava tõenäosusjaotuse, st lahendame jaotuse sobitamise ülesande, hinnates selleks katsetulemuste põhjal jaotuse parameetrid.



Mudelipõhised ennustused sõltuvad suurel määral protsessi kirjeldavast mudelist, selle aluseks olevast tõenäosusjaotusest. Seetõttu peab mudeli põhjal tehtud ennustustesse suhtuma ettevaatlikult, arvestades seda, et analüüsitav protsess võib ajas muutuda ja ka paratamatut juhuslikku viga.

Tõenäosuslikke mudeleid saab koostada ka mittearvuliste väärtustega protsessi kirjeldamiseks. Tehniliselt on lihtne kodeerida mittearvulised väärtused arvudena, kuid sel juhul tuleb silmas pidada, et koodidel ei ole arvude omadusi. Näiteks kasutades tunnuse "sugu" väärtuste „mees" ja „naine" koodidena arve 1 ja 2 tuleb meeles pidada, et koodide vahel ei ole suhet suurem/väiksem.

Mudelid on alati tegeliku protsessi lihtsustused ja seega ebatäpsed. Lubatava hinnangu**vea** suurus sõltub lahendatavast ülesandest. Klassikalise füüsika mudelid on näiteks küllalt täpsed tava-olukordade kirjeldamiseks, ent ei sobi satelliitide täppisjälgimiseks.

Üldiselt on lihtsam mudel parem kui keerukam mudel. Lihtsamast mudelist on kergem aru saada ja selle abil on toimuvat kergem tõlgendada. Keerukama mudeli jaoks tuleb enamasti hinnata rohkem parameetreid, mistõttu hinnangu juhuslik viga võib kasvada.